

MATEMATIČKA ANALIZA

Ispit – grupa 1
 OGLEDNI PRIMJER ISPITA

Bodovi i vrijeme pisanja po ishodu:

| Ishod | I1 | I2 | I3 | I4 | UKUPNO |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Bodovi | 20 | 20 | 20 | 20 | 80 |
| Vrijeme pisanja | 40 minuta | 40 minuta | 40 minuta | 40 minuta | 160 minuta |

UPUTE:

- Na ispitu je dozvoljeno korištenje kalkulatora.
- Na papiru koji ste dobili od čuvar(ic)a, napišite svoje ime i prezime te grupu (Grupa 1). Odgovore i postupak pišite na dodatni papir redom kojim su postavljeni zadaci, uz naznaku ishoda i zadatka na koji odgovarate. Ako pišete na više papira, obavezno se potpišite na sve papire! **Nepotpisani papiri / ispiti se neće pregledati!**

Ishod učenja 1 – 20 bodova / 40 minuta

1. [I1_M, 3 boda] Riješite limes bez upotrebe L'Hospitalovog pravila:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}.$$

2. [I1_M, 3 boda] Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \cos x + \frac{1}{x^2} + \sin x - e^3$.

3. [I1_M, 3 boda] Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = (e^x + 1) \cdot x^2$.

4. [I1_M, 3 boda] Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

5. [I1_Ž, 3 boda] Odredite prvu derivaciju funkcije $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sin x)$.

6. [I1_Ž, 5 bodova] Koristeći logaritamsko deriviranje, derivirajte funkciju:

$$f(x) = \sin^3 x \cdot \ln x^5.$$

Ishod učenja 2 – 20 bodova / 40 minuta

1. [I2_Ž, 4 boda] Zadana je funkcija $f(x) = \cos x$. Odredite normalu na tu krivulju u točki $T\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Zapišite jednadžbu normale pomoću brojeva u decimalnom zapisu zaokruženih na dva decimalna mjesta. Skicirajte graf zadane funkcije i traženu normalu!

2. [I2_M, 4 boda] Primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x)}{x^2 - x}.$$

3. [I2_M, 8 bodova] Ispitajte tok (odredite domen, nultočke, horizontalne i vertikalne asimptote, ispitajte monotonost i zakrivljenost te odredite točke ekstrema i točke pregiba) i skicirajte graf sljedeće funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1},$$

ako je

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}.$$

4. [I2_Ž, 4 boda] Zadana je funkcija potražnje u odnosu na cijenu:

$$q(p) = p^3 - 40p^2 + 500p.$$

Na kojoj razini cijena je prosječna potražnja minimalna i koliko ona iznosi?

Ishod učenja 3 – 20 bodova / 40 minuta

1. [I3_M, 4 boda] Riješite integral:

$$\int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin^2 x} + 5x - \pi \right) dx.$$

2. [I3_M, 4 boda] Riješite integral:

$$\int (1 + 3^x)^2 dx.$$

3. [I3_M, 4 boda] Metodom supstitucije riješite integral:

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx.$$

4. [I3_Ž, 4 boda] Riješite integral:

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx.$$

5. [I3_Ž, 4 boda] Pomoću parcijalne integracije riješite integral:

$$\int \sin x \cdot \cos 2x \, dx.$$

Ishod učenja 4 – 20 bodova / 40 minuta

1. [I3_Ž, 4 boda] Riješite određeni integral:

$$\int_0^1 \frac{4^x + 1}{2^x} \, dx.$$

2. [I4_M, 6 bodova] Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = \sqrt{x} - 1$ i koordinatnim osima. Obavezna skica!

3. [I4_Ž, 5 bodova] Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$2(x + 1) y y' = 3.$$

4. [I4_M, 5 bodova] Odredite funkciju potražnje u ovisnosti o cijeni, $q(p)$, ako joj je koeficijent elastičnosti jednak $E_{q,p} = -\frac{1}{2}$ i vrijedi $q(1) = 3$.

Formule

Linearna funkcija

$$y = k \cdot (x - x_1) = k \cdot x + l$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Kvadratna funkcija

$$\text{Nultočke: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Tjeme: } T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

Algebarski izrazi

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Potencije

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

Domena funkcije

$$\frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow f(x) \neq 0$$

$$\sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\log_a f(x) \Rightarrow f(x) > 0$$

Neodređeni oblici limesa

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty$$

Određeni oblici limesa

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{0}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\ln 0 = -\infty, \quad \ln \infty = \infty$$

$$e^\infty = \infty, \quad e^{-\infty} = 0$$

Postupci rješavanja limesa

- limes oblika $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: dijeljenje brojnika i nazivnika s najvećom potencijom
- limes oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$: faktorizacija polinoma
- limes oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$: racionalizacija korijena
- limes oblika $[\infty - \infty]$: racionalizacija korijena ili svođenje na zajednički nazivnik

L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{za oblike } \left[\frac{0}{0}\right] \text{ ili } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

- oblik $[0 \cdot \infty]$ se transformira u $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ seljenjem dijela izraza u nazivnik
- oblik $[\infty - \infty]$ se transformira $\left[\frac{0}{0}\right]$ ili $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oduzimanjem razlomaka ili racionalizacijom iracionalnih izraza

Tablične derivacije

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|------------------------|-----------------------|
| a | 0 |
| x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| e^x | e^x |
| a^x | $a^x \ln a$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

Trigonometrijske funkcije

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x}, & \cos^2 x + \sin^2 x &= 1\end{aligned}$$

Pravila deriviranja

- $(A \cdot f(x))' = A \cdot f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tok funkcije

1. Domena funkcije
2. Nultočke funkcije, $f(x) = 0$.
3. Vertikalne asimptote: pravac $x = a$ je VA ako je $\lim_{x \rightarrow a} = \pm\infty$.
4. Horizontalne asimptote: pravac $y = b$ je HA ako je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = b$.
5. Monotonost (pad i rast) funkcije: funkcija pada u točki x ako je $f'(x) < 0$; funkcija raste u točki x ako je $f'(x) > 0$.
6. Lokalni ekstremi: funkcija u točki x ima lokalni ekstrem ako prva derivacija u toj točki mijenja predznak.
7. Zakrivljenost (konveksnost i konkavnost) funkcije: funkcija je konkavna u točki x ako je $f''(x) < 0$; funkcija je konveksna u točki x ako je $f''(x) > 0$.
8. Točke infleksije: funkcija u točki x ima točku infleksije ako druga derivacija u toj točki mijenja predznak.

Tangenta i normala

Tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Normala na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Ekonomske funkcije

Osnovne ekonomske veličine (poput količine, cijene, prihoda...) nisu negativne.

Za ekonomsku funkciju $f(x)$ definiramo:

- *Prosječnu funkciju*: $Af(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- *Graničnu funkciju*: $Mf(x) = f'(x)$.
- *Elastičnost* u odnosu na varijablu x :
 $E_{f,x} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Interpretacija koeficijenta elastičnosti: za danu vrijednost varijable x , kada varijabla raste za 1%, tada vrijednost funkcije f raste / pada za približno $|E_{f,x}|$ %.

Tablični integrali

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + c$

Pravila integriranja

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Metoda supstitucije

$$\int f(g(x)) dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x) dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

Metoda parcijalne integracije

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F(x)$ rješenje pripadnog neodređenog integrala.

Površina između krivulja

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

gdje je $f(x)$ "gornja", a $g(x)$ "donja" funkcija.

Separabilne diferencijalne jednačbe

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

1. Derivaciju zapišemo pomoću diferencijala: $y' = \frac{dy}{dx}$.
2. Separiramo diferencijalnu jednačbu: x grupiramo uz dx , a y uz dy .
3. Integriramo jednačbu.
4. Izrazimo y i zapišemo opće rješenje jednačbe.
5. U opće rješenje uvrstimo početni uvjet i odredimo vrijednost konstante c .
6. Uvrstimo konstantu c u opće rješenje i zapišemo partikularno rješenje jednačbe.

